2013

Series SKS/2

कोड नं. **65/2/3**

Code No.

रोल नं.

Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours — *Maximum Marks : 100*

2013 XII

सामान्य निर्देश :

(i) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में **10** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **12** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड स में **7** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।

(iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।

(iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।

General Instructions :

(i) **All** questions are compulsory.

(ii) The question paper consists of **29** questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of **10** questions of **one mark** each, Section B comprises of **12** questions of **four marks** each and Section C comprises of **7** questions of **six marks** each.

(iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.

(iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.

(v) Use of calculators is **not** permitted.

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

1. उस समतल का कार्तीय समीकरण लिखिए, जो बिन्दुओं A(2, 3, 5) तथा B(4, 5, 7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का लंब समद्विभाजन करता है ।

Write the cartesian equation of a plane, bisecting the line segment joining the points A(2, 3, 5) and B(4, 5, 7) at right angles.

2. किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लिए, निम्न का मान लिखिए :

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$$

For any three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$, write the value of the following :

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$$

3. समीकरण $y = mx + c$ से बना अवकल समीकरण लिखिए, जबकि m तथा c स्वेच्छ अचर हैं ।

Write the differential equation formed from the equation $y = mx + c$, where m and c are arbitrary constants.

4. यदि किसी क्षेत्र में x वाहनों के आने पर वायु में कार्बन प्रदूषण की मात्रा

$$C = 0{\cdot}003x^3 + 0{\cdot}02x^2 + 6x + 250$$

द्वारा प्रदत्त है, तो उस क्षेत्र में 3 वाहनों के आने पर वायु में सीमांत कार्बन प्रदूषण ज्ञात कीजिए तथा लिखिए कि उपरोक्त प्रश्न कौन-सा मूल्य दर्शाता है ।

If $C = 0{\cdot}003x^3 + 0{\cdot}02x^2 + 6x + 250$ gives the amount of carbon pollution in air in an area on the entry of x number of vehicles, then find the marginal carbon pollution in the air, when 3 vehicles have entered in the area and write which value does the question indicate.

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} लिखिए ।

If $A = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, then write A^{-1}.

6. यदि A एक वर्ग आव्यूह है तथा $|A| = 2$ है, तो $|A A'|$ का मान लिखिए, जबकि A', आव्यूह A का परिवर्त है ।

If A is a square matrix and $|A| = 2$, then write the value of $|A A'|$, where A' is the transpose of matrix A.

7. यदि A एक 3×3 आव्यूह है, जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{3}|-3i + j|$ से प्रदत्त हैं, तो a_{23} का मान लिखिए ।

If A is a 3×3 matrix, whose elements are given by $a_{ij} = \frac{1}{3}|-3i + j|$, then write the value of a_{23}.

8. $\tan^{-1}\left(\tan \frac{9\pi}{8}\right)$ का मुख्य मान लिखिए ।

Write the principal value of $\tan^{-1}\left(\tan \frac{9\pi}{8}\right)$.

9. $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right), |x| > 1$ को सरलतम रूप में लिखिए ।

Write $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right), |x| > 1$ in simplest form.

10. यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है तथा $(2\vec{x} - 3\vec{a}) \cdot (2\vec{x} + 3\vec{a}) = 91$ है, तो $|\vec{x}|$ का मान लिखिए ।

If $\vec{a}$ is a unit vector and $(2\vec{x} - 3\vec{a}) \cdot (2\vec{x} + 3\vec{a}) = 91$, then write the value of $|\vec{x}|$.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है ।

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

11. एक कैंप में आए 50 स्काउटों के एक समूह में से 30 प्राथमिक सहायता की तकनीकों में पूर्णतया प्रशिक्षित हैं जबकि अन्य के पास प्राथमिक सहायता का कोई प्रशिक्षण नहीं है परन्तु यह आतिथ्य सत्कार में प्रशिक्षित हैं । इस समूह में से दो स्काउट यादृच्छया चुने गए । चुने गए स्काउटों में से प्राथमिक सहायता में पूर्णतया प्रशिक्षित स्काउटों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए तथा इसका माध्य भी ज्ञात कीजिए ।

एक प्रशिक्षित स्काउट से अपेक्षित एक अन्य मूल्य (गुण) लिखिए ।

In a group of 50 scouts in a camp, 30 are well trained in first aid techniques while the remaining are well trained in hospitality but not in first aid. Two scouts are selected at random from the group. Find the probability distribution of number of selected scouts who are well trained in first aid. Find the mean of the distribution also.

Write one more value which is expected from a well trained scout.

12. निम्नलिखित रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}; \quad \frac{3-x}{-1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}.$$

अथवा

बिन्दुओं (2, 1, – 1) तथा (– 1, 3, 4) से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $x - 2y + 4z = 10$ के लंबवत् है ।

Find the shortest distance between the following lines :

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}; \quad \frac{3-x}{-1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}.$$

OR

Find the equation of the plane through the points (2, 1, – 1) and (– 1, 3, 4) and perpendicular to the plane $x - 2y + 4z = 10$.

13. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

14. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16 \sin 2x}\, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int x^2 \log (1 + x)\, dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16 \sin 2x}\, dx$$

OR

Evaluate :

$$\int x^2 \log (1 + x)\, dx$$

15. दर्शाइए कि फलन $f(x) = 2x - |x|$, $x = 0$ पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है ।

अथवा

$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ का $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए, जबकि $x \neq 0$ है ।

Show that the function $f(x) = 2x - |x|$ is continuous but not differentiable at $x = 0$.

OR

Differentiate $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ with respect to $\tan^{-1} x$, when $x \neq 0$.

16. यदि $y = \sin(\log x)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

If $y = \sin(\log x)$, then prove that

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

17. यदि $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $y = \cot^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin y = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

If $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$, then find the value of x.

OR

If $y = \cot^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$, then prove that $\sin y = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

18. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ में, $R = \{(a, b) : |a - b|$, 2 से भाज्य है$\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है । अवयव 6 से सम्बन्धित सभी अवयवों को ज्ञात कीजिए ।

Prove that the relation R in the set $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ given by $R = \{(a, b) : |a - b| \text{ is divisible by } 2\}$, is an equivalence relation. Find all elements related to the element 6.

19. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2x^2+3}{x^2+5x+6}\,dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{2x^2+3}{x^2+5x+6}\,dx$$

20. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से, निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

21. सदिशों $\vec{a} + 2\vec{b}$ और $2\vec{a} + \vec{b}$ में प्रत्येक की लंब दिशा में एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ है।

Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a} + 2\vec{b}$ and $2\vec{a} + \vec{b}$, where $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$.

22. निम्न का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}\right], \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Differentiate the following with respect to x :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}\right], \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है ।

Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

23. अकसर यह माना जाता है कि सत्यवादी व्यक्ति समाज में अधिक सम्मान पाता है । एक व्यक्ति के विषय में यह ज्ञात है कि वह 5 में से 4 बार सत्य बोलता है । वह एक पासे को उछालता है और कहता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है । इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है । क्या आप इस बात से भी सहमत हैं कि सत्यता का मूल्य व्यक्ति को समाज में अधिक सम्मान देता है ?

Often it is taken that a truthful person commands more respect in the society. A man is known to speak the truth 4 out of 5 times. He throws a die and reports that it is actually a six. Find the probability that it is actually a six. Do you also agree that the value truthfulness leads to more respect in the society ?

24. एक हवाई जहाज अधिकतम 200 यात्रियों को यात्रा पर ले जा सकता है । प्रत्येक प्रथम श्रेणी के टिकट पर ₹ 500 का लाभ होता है, जिसका 20% कर्मचारियों के कल्याण के लिए बने कोष में जाता है । इसी प्रकार सस्ते श्रेणी के टिकट पर ₹ 400 का लाभ होता है जिसका 25% सस्ते श्रेणी के यात्रियों को दी जाने वाली सुविधाओं को बढ़ाने में प्रयोग किया जाता है । दोनों दशाओं में लाभ का शेष भाग एयरलाइन के कोष में जाता है । एयरलाइन कम-से-कम 20 सीटें प्रथम श्रेणी के लिए आरक्षित करती है जबकि प्रथम श्रेणी की अपेक्षा कम-से-कम चार गुने यात्री सस्ती श्रेणी के टिकट से यात्रा करने को वरीयता देते हैं । ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने टिकट बेचे जाएँ कि एयरलाइन का शुद्ध लाभ अधिकतम हो । उपरोक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर आलेख द्वारा हल कीजिए । आपके विचार में क्या ऐसी एयरलाइन से जाने में, दूसरों की अपेक्षा, अधिक यात्री वरीयता देंगे ?

An aeroplane can carry a maximum of 200 passengers. A profit of ₹ 500 is made on each executive class ticket out of which 20% will go to the welfare fund of the employees. Similarly a profit of ₹ 400 is made on each economy ticket out of which 25% will go for the improvement of facilities provided to economy class passengers. In both cases, the remaining profit goes to the airline's fund. The airline reserves at least 20 seats for executive class. However at least four times as many passengers prefer to travel by economy class than by the executive class. Determine how many tickets of each type must be sold in order to maximise the net profit of the airline. Make the above as an LPP and solve graphically.

Do you think, more passengers would prefer to travel by such an airline than by others ?

25. एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ है, का समतल $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + 3 = 0$ में प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए ।

अथवा

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से $3\sqrt{3}$ मात्रक की दूरी पर है, तथा जिसका अभिलंब निर्देशांक अक्षों पर समान रूप से झुका हुआ है ।

Find the image of the point having position vector $\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ in the plane $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + 3 = 0$.

OR

Find the equation of a plane which is at a distance of $3\sqrt{3}$ units from origin and the normal to which is equally inclined to the coordinate axes.

26. सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम शंकु का आयतन, गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है ।

अथवा

दर्शाइए कि वक्र $x = a \cos \theta + a\theta \sin \theta$, $y = a \sin \theta - a\theta \cos \theta$ के किसी बिन्दु θ पर अभिलंब मूल बिन्दु से अचर दूरी पर है ।

Prove that the volume of the largest cone, that can be inscribed in a sphere of radius R is $\frac{8}{27}$ of the volume of the sphere.

OR

Show that the normal at any point θ to the curve $x = a \cos \theta + a\theta \sin \theta$, $y = a \sin \theta - a\theta \cos \theta$ is at a constant distance from the origin.

27. एक विद्यालय से 10 विद्यार्थियों को गुणों के आधार पर चुनकर पुरस्कृत करने के लिए तीन समूहों में बाँटा गया । प्रथम समूह के विद्यार्थी कठोर परिश्रमी हैं, दूसरे समूह वाले ईमानदार तथा न्यायसंगत हैं तथा तीसरे समूह में सजग तथा आज्ञाकारी विद्यार्थी हैं । प्रथम समूह के विद्यार्थियों की संख्या को 2 से गुणा करके दूसरे समूह के विद्यार्थियों की संख्या में जोड़ने पर 13 आता है, जबकि प्रथम तथा दूसरे समूह के विद्यार्थियों की संख्या का योगफल तीसरे समूह के विद्यार्थियों की संख्या का चार गुना है । तीनों समूहों के विद्यार्थियों की अलग-अलग संख्या आव्यूह विधि से ज्ञात कीजिए । उपरोक्त मूल्यों, कठोर परिश्रम, ईमानदारी तथा न्यायसंगतता तथा सजग व आज्ञाकारी होने के अतिरिक्त एक अन्य मूल्य सुझाइए जो कि आपके विचार में विद्यालय को पुरस्कार देने के लिए शामिल करना चाहिए ।